ジョンソンスキームに対する中山の予想の類似 (代数的組合せ論)

島袋, 修

数理解析研究所講究録 1394 巻 2004 年 28-34

ジョンソンスキームに対する中山の予想の類似

九州大学・数理学府　　島袋　修 (Osamu Shimabukuro)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 Introduction

この原稿では [3] によるアソシエーションスキームの一般指標のブロック分解に関する命題をもとにジョンソンスキームの一般指標のブロック分解に関して考えた。とくにジョンソンスキームの一般指標は対称群の一般指標を用いて表記できる。故に中山の予想との関連を考えることは自然である。

Theorem 1 ([7],[3]). (X,G) の p モジュラー系 (K,R,F) を固定する。つまり R を完備な離散付置環（単項イデアル）とし、その商体を K、さらにその標数は 0 とする。また (π) を R の極大イデアルとし、剰余体 $F=R/(\pi)$ の標数を p とする。(X,G) を可換なアソシエーションスキームとし、$\chi,\varphi\in Irr(G)$ とすると、χ,φ が同じブロックに属する必要十分条件は

$$\chi(\sigma_g)\equiv\varphi(\sigma_g)\ (mod(\pi)),\ \forall g\in G. \tag{1}$$

これはジョンソンスキームで考えた場合に第一固有行列の各成分を modulo p で簡約したとき、どの行がいつ一致するかという問題である。χ_j を $Irr(\mathbb{C}S(m))$ の元で 1 行もしくは 2 行のヤング図形に対応する既約指標とし、$S(m)$ の部分群 $H=S(n)\times S(m-n)$ とするとき、対称アソシエーションスキームである、ジョンソンスキーム $J(m,n)$ の第一固有行列の (j,i)-成分 $P_i^{m,n}(j)$ は

$$P_i^{m,n}(j)=\frac{1}{|H|}\sum_{x\in Hy_iH}\chi_j(x) \tag{2}$$

である。このように、対称群の既約指標を用いて書くことができる [1]。

対称群の既約指標の p ブロックに関して以下は有名である。

Theorem 2 ([5]). *NAKAYAMA'S CONJECTURE. Two ordinary irreducible representations* $[\alpha]$ *and* $[\beta]$ *of* $S(n)$ *belong to the same p-block if and only if their p-cores are equal:* $[\alpha]_p=[\beta]_p$

つまり、対称群の場合、一般指標のブロック分割は実際の指標を求めずとも、指標に対応するヤング図形の p-コアの様子を見るだけで決定できる。これらの状況からジョンソンスキームに対しても同様なこと、つまり同じブロック

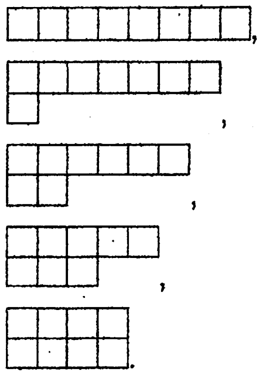
に入る二つの既約指標があれば、それぞれに対応するヤング図形の p-コアが同じであるということが言えないかと考えてみると、以下の反例が見つかる。

Example 1.1. $J(8,4)$

Char $F=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 16 & 36 & 16 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & -8 & -1 \\ 1 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

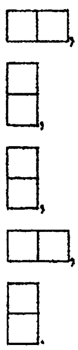
各行に対応する既約指標に関するヤング図形は



Char $F=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

上から (0行目から数え始めて) 2行目と4行目のみ一致していることがわかる。各行に対応する既約指標に対応するヤング図形の *3-core* は



1，2，4行目が一致し0，3行目も一致している。

2 Preliminary

定義などを書く。M を $|M| = m$ の有限集合とする。$0 < n \leq m/2$ となる n に対して、集合 $\binom{M}{n} = \{N \subset M \mid |N| = n\}$ を定義し、$N_1, N_2 \in \binom{M}{n}$ に対して Johnson distance $\rho(N_1, N_2) = n - |N_1 \cap N_2|$ を定義する。$R_i = \{(N_1, N_2) \mid \rho(N_1, N_2) = i\}$ と定めることで、$\mathfrak{X} = (\binom{M}{n}, \{R_i\}_{0 \leq i \leq n})$ は association scheme になる。$\mathfrak{X} = J(m, n)$ とし、Johnson association scheme もしくは Johnson scheme という [1]。
以下の記号を使うことにする。
$A_i (0 \leq i \leq n)$ はそれぞれ R_i に対応する隣接行列;
$P_i^{m,n}(j)$ は $J(m, n)$ の first eigen matrix の (i, j)-成分;
$v_i(m, n)$ は $J(m, n)$ の R_i の valency;
これらのパラメータについて考えると [1]

$$v_i(m,n) = \binom{n}{i}\binom{m-n}{i}, \tag{5}$$

$$P_i^{m,n}(j) = \sum_{k=0}^{i}(-1)^k \binom{j}{k}\binom{n-j}{i-k}\binom{m-n-j}{i-k}. \tag{6}$$

が得られる。ただし、

$$\binom{a}{b} = \begin{cases} \frac{a!}{b!(a-b)!} & \text{if } 0 \leq b \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{7}$$

上式 (6) の右辺は dual Hahn polynomial とよばれている。この polynomial については以下のような漸化式が成り立つ。

$$P_i^{m,n}(j) = \begin{cases} P_i^{m-2,n-1}(j-1) - P_{i-1}^{m-2,n-1}(j-1) & (1 \leq i \leq n-1) \\ -P_{i-1}^{m-2,n-1}(j-1) & (i = n) \end{cases} \tag{8}$$

ただし、$1 \leq j \leq n$ である。

Theorem 3 (Lucas'). *[2] Let p be a prime, $m = a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k$ and $n = b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k$, where $0 \leq a_i, b_i < p$ for $i = 0, 1, \cdots, k-1$. Then $\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k} \binom{a_i}{b_i}$ (mod p).*

Theorem 4. *[4] $J(m, n)$ の体 F 上 modular algebra $\mathfrak{A} := \oplus_{i=0}^{n} F A_i$ に対して、$|IRR(\mathfrak{A})| = |i \in 0, \cdots, n : p \nmid \binom{m-2i}{m-n-i}|$.*

Proposition 5. *[4] p を素数とする。$p \nmid \binom{m}{n}$ のときに限って、$P^{m,n}$ (mod p) の 0 行目は他の行と異なる。*

3 Main Theorem

主結果を述べるため、準備と主結果とその例について述べる。

Proposition 6. $P^{m-2,n-1}(mod\ p)$ において $j_1-1, j_2-1 (1 \le j_1, j_2 \le n)$ 行目が一致する必要十分条件は $P^{m,n}(mod\ p)$ において j_1, j_2 行目が一致することである。

この命題から、$J(2n+l,n)$ の a,b 行目が合同であることは $J(2(n+k)+l, n+k)$ の $a+k, b+k$ 行目が合同であることと同値であることがわかる。また、この l について次がいえる。

Proposition 7. $p^k > n$ に対して $P_i^{m+p^k,n}(j) \equiv P_i^{m,n}(j), \forall i,j.$

これより考えるべき l は $p^k > l$ に限定される。また、このようにある行の任意の列に対して合同であるとき、$P^{m+p^k,n}(j) \equiv P^{m,n}(j)$ と表すことにする。

Proposition 8. *Let $P_j^{m,n}(i)$ be a (i,j)-entry of the first eigenmatrix of $J(m,n)$, $a,b,c \in \mathbb{Z}$ such that $0 \le a,b,c < p^{t-1}$ and $a_{t-1}, b_{t-1}, c_{t-1} \in \mathbb{Z}$ such that $0 \le a_{t-1}, b_{t-1}, c_{t-1} < p$ then*

$$P_{b_{t-1}p^{t-1}+b}^{2(p^t-1)+a_{t-1}p^{t-1}+a,p^t-1}(c_{t-1}p^{t-1}+c) \equiv P_b^{2(p^{t-1}-1)+a,p^{t-1}-1}(c)P_{b_{t-1}}^{2(p-1)+l,p-1}(c_{t-1})\ (mod\ p) \quad (9)$$

$$where\ l = \begin{cases} a_{t-1}+1\ (mod\ p) & c<a \\ a_{t-1} & c \ge a. \end{cases}$$

上の Proposition 8 より $a = a_{t-1}p^{t-1}+\cdots+a_0, b = b_{t-1}p^{t-1}+\cdots+b_0, c = c_{t-1}p^{t-1}+\cdots+c_0$ とするとき

$$P_b^{2(p^t-1)+a,p^t-1}(c) \equiv P_{b_0}^{2(p-1)+a_0,p-1}(c_0)P_{b_1}^{2(p-1)+l_1,p-1}(c_1)\cdots P_{b_{t-1}}^{2(p-1)+l_{t-1},p-1}(c_{t-1}) \quad (10)$$

と一意的に表せる。ただし

$$l_k = \begin{cases} a_k+1 & (c_{k-1}+\cdots+c_0 < a_{k-1}+\cdots+a_0) \\ a_k & (c_{k-1}+\cdots+c_0 \ge a_{k-1}+\cdots+a_0) \end{cases} (1 \le k \le t-1) \quad (11)$$

式 (10) は、各成分 $P_b^{2(p^t-1)+a,p^t-1}(c)$ が p 進展開をもとに、t 個の p 次の行ベクトルの成分を組み合わせて積をとったものである、ということを意味している。この組合せを込めて、c 行目を

$$P^{2(p^t-1)+a,p^t-1}(c) \equiv P^{2(p-1)+a_0,p-1}(c_0)\cdots P^{2(p-1)+l_{t-1},p-1}(c_{t-1}) \quad (12)$$

と書くことにする。

合同な2行があった場合に、Proposition 6 を用いてパラメータを操作し、さらに modulo p において上の分解を用いると、それぞれの成分をより小さな(具体的にはクラス数 $p-1$ の) パラメータをもつジョンソンスキームの第一固有行列の成分の積として表すことができる。また、クラス数 $p-1$ のジョンソンスキームに関して Example 1.1 のような反例は見つからない。つまり、クラス数が $p-1$ の場合には、2つのヤング図形の p-コアが一致する条件と対応する2行の合同条件が一致していると予想され、正しいこともわかった。このことを主結果として以下にまとめる。記号として、n の分割からできる1もしくは2行のヤング図形を $[\lambda_1,\lambda_2](\lambda_1+\lambda_2=n,\lambda_1\geq\lambda_2)$ として、その p-コアを $[\lambda_1,\lambda_2]_p$ とおくことにする。また、p-core sequence $[[\lambda_{a_1},\lambda_{b_1}]_p,\cdots,[\lambda_{a_t},\lambda_{b_t}]_p]$ と $[[\mu_{a_1},\mu_{b_1}]_p,\cdots,[\mu_{a_t},\mu_{b_t}]_p]$ が一致するとは $[\lambda_{a_k},\lambda_{b_k}]_p=[\mu_{a_k},\mu_{b_k}]_p,(1\leq\forall k\leq t)$ であるときをいう。

Theorem 9. *MAIN THEOREM.* $P^{2n+l,n}(a)\equiv P^{2n+l,n}(b)\ (mod\ p)$ である必要十分条件は $t\in\mathbb{Z}$ *such that* $p^t-1\geq n$ を固定したとき

$$P^{2(p^t-1)+l,p^t-1}(a+p^t-1-n)\equiv P^{2(p^t-1)+l,p^t-1}(b+p^t-1-n)\ (mod\ p)$$

である。また、このとき

$$\begin{aligned}&P^{2(p^t-1)+l,p^t-1}(a+p^t-1-n)\\&\quad\equiv P^{2(p-1)+a_0,p-1}(c_0)P^{2(p-1)+f_1,p-1}(c_1)\cdots P^{2(p-1)+f_{t-1},p-1}(c_{t-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P^{2(p^t-1)+l,p^t-1}(b+p^t-1-n)\\&\quad\equiv P^{2(p-1)+a_0,p-1}(d_0)P^{2(p-1)+g_1,p-1}(d_1)\cdots P^{2(p-1)+g_{t-1},p-1}(d_{t-1})\end{aligned}$$

と分解できると二つが合同である必要十分条件は、それぞれの式の右辺に現れる一般指標に対応するヤング図形の *p-core の sequence*

$$[[2(p-1)+a_0-c_0,c_0]_p,[2(p-1)+f_1-c_1,c_1]_p,\cdots,[2(p-1)+f_{t-1}-c_{t-1},c_{t-1}]_p],$$
$$[[2(p-1)+a_0-d_0,d_0]_p,[2(p-1)+g_1-d_1,d_1]_p,\cdots,[2(p-1)+g_{t-1}-d_{t-1},d_{t-1}]_p]$$

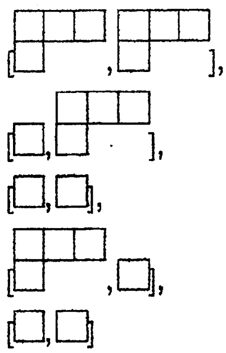
が一致することである。

Example 3.1. $J(8,4)$ の第一固有行列を $p=3$ で再び考えてみる。$J(2\times4,4)$ の *2* 行目と *4* 行目が一致しており、*0,1,3* 行目は一致しないので $J(2(3^2-1),3^2-1)$ の $2+3^2-1-4=6, 4+3^2-1-4=8$ 行目が一致している *4,5,7* 行目は自分以外の *4* から *8* 行目とは一致しない。また、$P^{2(3^2-1),3^2-1}(4)$, $P^{2(3^2-1),3^2-1}(5)$, $P^{2(3^2-1),3^2-1}(6)$, $P^{2(3^2-1),3^2-1}(7)$, $P^{2(3^2-1),3^2-1}(8)$ は次のように表すことができる。

$$P^{2(3^2-1),3^2-1}(1*3+1)\equiv P^{2(3-1),3-1}(1)P^{2(3-1),3-1}(1)$$

$$P^{2(3^2-1),3^2-1}(1*3+2) \equiv P^{2(3-1),3-1}(2)P^{2(3-1),3-1}(1)$$
$$P^{2(3^2-1),3^2-1}(2*3+0) \equiv P^{2(3-1),3-1}(0)P^{2(3-1),3-1}(2)$$
$$P^{2(3^2-1),3^2-1}(2*3+1) \equiv P^{2(3-1),3-1}(1)P^{2(3-1),3-1}(2)$$
$$P^{2(3^2-1),3^2-1}(2*3+2) \equiv P^{2(3-1),3-1}(2)P^{2(3-1),3-1}(2)$$

と分解できるので対応するヤング図形の 3 コアの *sequence* は上から、それぞれ次のようになる



たしかに *6* 行目と *8* 行目のみの 3 コア列が一致している。

4 今後の課題

こうして得られた結果を道具として他の未解決問題に役に立てたいと思うのは自然な欲求であろう。ジョンソンスキームについては、未だサブスキーム（フュージョンスキーム）の列挙問題は解決されていない [6]。そこで p 簡約された指標が役に立つと思われる。例えば、$J(10,4)$ の指標表は

$$\begin{pmatrix} 1 & 24 & 90 & 80 & 15 \\ 1 & 14 & 15 & -20 & -10 \\ 1 & 6 & -9 & -4 & 6 \\ 1 & 0 & -6 & 8 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \text{modulo 5 で簡約すると} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ジョンソンスキームが Q 多項式スキームであるので第 1 行目は必ず他の列とフュージョンしなければならない。1 行目が非自明なフュージョンを起こす可能性のある行は 3 行目である。これに対応して列のフュージョンの可能性は 1 と 2 列目及び 3 と 4 列目である。しかし、modulo 3 で簡約された行列を考えると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

. これは、modulo 5 で簡約された行列から得られたフュージョンと一致しておらず、$J(10,4)$ は非自明なサブスキームを持たないことがわかるが、パラメータによってうまく説明できないものもあ

る。さらに実験を重ね、一般的な証明を目指していこうと思う。また、この原稿に載っているいくつかの命題はモジュラー隣接代数の性質から証明できた。そこでさらに、ジョンソンスキームのモジュラー隣接代数の構造の決定に取り組みたい。

参考文献

[1] E.Bannai, Ito.T, Algebraic Combinatorics I:Association Schemes, Benjamin, 1984.

[2] P.J.Cameron Combinatorics:Topics,Techniques,Algorithms, Cambridge Univ.Press, 1994.

[3] A.Hanaki, Block decomposition of standard modules, (unpublished) "http://math.shinshu-u.ac.jp/%7Ehanaki/notes.html"

[4] A.Hanaki, Johnson Scheme の既約モジュラー表現の個数 (unpublished)

[5] G.James, A.Kerber, The representation theory of the symmetric group, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 16, Addison-Wesley, 1981.

[6] M.E.Muzychuk, Subschemes of the Johnson Scheme, Europ.J.Combinatorics, 1992, 13, 187-193.

[7] H.Nagao, Y.Tsushima, Representations of Finite Groups (Japanese), Shoukabou, 1987.